

JACEK SZAFRAN  
Technical University of Łódź  
e-mail: jacek.szafran@p.lodz.pl

# APPLICATION OF THE GENERALIZED STOCHASTIC PERTURBATION METHOD IN CABLE STRUCTURES ANALYSIS

## Abstract

*The main focus of this paper is the presentation of the capabilities of the numerical analysis dedicated to cable structures affected by random parameters. The main tool of the analysis carried out is the Generalized Stochastic Perturbation Method. It allows to determine numerically the statistical data for horizontal reaction of a single cable with respect to random parameters, such as the modulus of elasticity of rope or the magnitude of loading. Central probabilistic moments of structure responses are calculated using the analytical approach to the determination of horizontal reactions of a single cable supported with a stochastic perturbation technique. The moments were obtained for random Young modulus and loading. In the analyses, computer algebra system MAPLE v.13 was applied. The computer application described in the paper may be utilized in reliability analysis of much more complex cable structures such as masts, girders, roofs or cable supported bridges.*

**Keywords:** cable structures, Generalized Stochastic Perturbation Method, reliability index, probabilistic methods

## 1. Introduction

Cable structures (structures with tension components) are becoming widely considered both in engineering practice and scientific research. Their main advantages are described in publications [1, 2], among which undoubtedly lies the light weight of the structure inferred from high material strength (weight/strength ratio) and the fact that tensile stresses exist uniquely in cable elements. However, there are also several reasons why their application seems to be limited. Those include implementation problems at a construction site (mainly with the anchoring of cables in foundations and the determination of the appropriate geometry of the system) and, above all, problems in computational analysis.

One of the problems in computational analysis of cable elements is proper adoption of the modulus of elasticity factor for structure cables. In case of mast structures, it was discussed in work [3]. Considering cable elements not subjected to preliminary pulling (or if the process was not performed to the full extent), the values of this parameter can have quite large dispersion. Taking this fact into account, we conclude that the carrying capacity of that stretched element is random as well. Other cases of randomness for structural steel tension elements were described

in publication [4]. This fact induces the adoption of the modulus of elasticity as a random parameter in the proceeding computational analysis.

In design process for cable structures, we frequently have to consider two load cases, namely wind and ice loading. Both these parameters can be recognized as random ones. In engineering practice there are known cases when a sudden increase in thickness (and, consequently, in weight) of ice on cable elements caused series of failures or even construction disasters. The energy sector and its transmission lines are most exposed to this kind of threat.

## 2. Recent research trends

Cable structures are one of most implemented structural elements in modern engineering objects, such as bridges, masts, wide span roofs, etc. Nowadays, we observe a research trend which makes much more information and results accessible concerning the cable structures theory, the implementation and the execution. Many of the research articles are fully devoted to the probabilistic aspect of these modern constructions.

In [5] we can find considerations about steel suspension cables that suffer from continuous aggression of the environment. Such effects include corrosion and the modification of the cable such as

the change of geometrical and mechanical parameters of the components or the reduction of its bearing capacity. The described problem has been solved through a probabilistic multi-scale time dependent model. Obtained results can serve as a monitoring tool in many of the structures with suspension cables.

Reliability aspects have been studied in [6]. The strength and fatigue life of cables were presented in the form based on experimental data from examples of supported bridges. The reliability here is considered as an effect of the proper design philosophy and corrosion protection that influences resistance factors of the stay cable resistance.

Stochastic seismic finite element analysis of a cable stayed bridge with material properties treated as a random fields is analyzed in [7]. The Jindo Bridge, constructed in South Korea was chosen to present numerically results of the Monte Carlo Simulation and the perturbation based stochastic finite element method. Random parameters here were mass density and elastic modulus.

Wind aspects in the analysis of the vibrations of the anchor cables are presented in [8]. The Authors had measured in situ wind records and implemented statistical characteristics and density functions into the investigation. The wind stochastic velocity fluctuation was modelled as a one-variate bi-dimensional random fields. The study was focused on time-dependent behavior of a synthetic cable subjected to turbulent wind.

New design approaches are presented in [9]. A tool for numerical determination of the cable – membrane structures shapes is developed. The method helps as well in the discretization of such a structures by automatically generating finite element meshes of the objects.

All the cited above articles show how significant the probabilistic methods are nowadays with their computer implementation which indicates the importance of cable structures in engineering.

### 3. Generalized Stochastic Perturbation Method

Let us introduce a random variable  $b = b(\omega)$  with its probability density function denoted as  $p(b)$ . The central probabilistic moment of the order of  $m$  is defined as:

$$\mu_m(b) = \int_{-\infty}^{+\infty} (b - E[b])^m p(b) db \quad (1)$$

The basic idea of the stochastic perturbation approach described widely in book [10] is to expand all input variables and state functions of a

given problem via Taylor series about their spatial expectations using a small parameter  $\varepsilon > 0$ . In case of a random quantity  $e = e(b)$ , the following expression is employed:

$$e = e^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \varepsilon^n \frac{\partial^n e}{\partial b^n} (\Delta b)^n \quad (2)$$

where  $\varepsilon \Delta b = \varepsilon(b - b^0)$  is the first variation of  $b$  about  $b^0$ , where the symbol  $(.)^0$  represents the function value  $(.)$  taken at the expectation  $b^0$ . Let us analyze further the expected values of any state function  $f(b)$  defined according to Equation (1) by its expansion via Taylor series with a given small parameter  $\varepsilon$  as follows:

$$\begin{aligned} E[f(b); b] &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(b) p(b) db = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left( f^0(b) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \varepsilon^n \frac{\partial^n f}{\partial b^n} \Delta b^n \right) p(b) db \quad (3) \end{aligned}$$

This expected value can be calculated or symbolically computed only if it is given as an analytical function of the random input parameter  $b$ . Computational implementation of the symbolic calculus programs, combined with a powerful visualization of probabilistic output moments, assures the fastest solution to such problems. If higher order terms are necessary (because of great random dispersion of an input random variable about its expected value), then the following 8<sup>th</sup> order extension can be proposed:

$$\begin{aligned} E^8[f(b); b] &= f^0(b) + \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(b)}{\partial b^2} \right] \varepsilon^2 \mu_2(b) + \\ &+ \left[ \frac{1}{4!} \frac{\partial^4 f(b)}{\partial b^4} \right] \varepsilon^4 \mu_4(b) + \left[ \frac{1}{6!} \frac{\partial^6 f(b)}{\partial b^6} \right] \varepsilon^6 \mu_6(b) + \\ &+ \left[ \frac{1}{8!} \frac{\partial^8 f(b)}{\partial b^8} \right] \varepsilon^8 \mu_8(b) \quad (4) \end{aligned}$$

Equation (4) is presented for symmetrical probability density functions (Gaussian distribution for instance), which can be noticed by taking into account the even elements only.

From numerical point of view, the expansion introduced by Equation (1) is carried out for the summation over the finite number of components and with finite limits during the integration process. As can be recognized here, the first element corresponds to the second order perturbation, the second completes 4<sup>th</sup> order approximation and the rest needs to be included to achieve full 8<sup>th</sup> order expansion.

To present the complexity of the expansion for higher order terms and higher probabilistic moments in Equation (5), the variance of 16<sup>th</sup> order is described as follows:

$$\begin{aligned}
 \text{Var}^{16} [f(b); b] = & \left[ \frac{\partial f(b)}{\partial b} \right]^2 \varepsilon^2 \mu_2(b) + \left[ \frac{1}{4} \left( \frac{\partial^2 f(b)}{\partial b^2} \right)^2 + \frac{1}{3} \left( \frac{\partial f(b)}{\partial b} \right) \left( \frac{\partial^3 f(b)}{\partial b^3} \right) \right] \varepsilon^4 \mu_4(b) + \\
 & \left[ \frac{1}{36} \left( \frac{\partial^3 f(b)}{\partial b^3} \right)^2 + \frac{1}{24} \left( \frac{\partial^2 f(b)}{\partial b^2} \right) \left( \frac{\partial^4 f(b)}{\partial b^4} \right) + \frac{1}{60} \left( \frac{\partial f(b)}{\partial b} \right) \left( \frac{\partial^5 f(b)}{\partial b^5} \right) \right] \varepsilon^6 \mu_6(b) + \\
 & \left[ \frac{1}{576} \left( \frac{\partial^4 f(b)}{\partial b^4} \right)^2 + \frac{1}{360} \left( \frac{\partial^3 f(b)}{\partial b^3} \right) \left( \frac{\partial^5 f(b)}{\partial b^5} \right) + \frac{1}{720} \left( \frac{\partial^2 f(b)}{\partial b^2} \right) \left( \frac{\partial^6 f(b)}{\partial b^6} \right) + \right. \\
 & \left. \frac{1}{2520} \left( \frac{\partial f(b)}{\partial b} \right) \left( \frac{\partial^7 f(b)}{\partial b^7} \right) \right] \varepsilon^8 \mu_8(b) + \\
 & \left[ \frac{1}{14400} \left( \frac{\partial^5 f(b)}{\partial b^5} \right)^2 + \frac{1}{8640} \left( \frac{\partial^4 f(b)}{\partial b^4} \right) \left( \frac{\partial^6 f(b)}{\partial b^6} \right) + \frac{1}{15120} \left( \frac{\partial^3 f(b)}{\partial b^3} \right) \left( \frac{\partial^7 f(b)}{\partial b^7} \right) + \right. \\
 & \left. \frac{1}{40320} \left( \frac{\partial^2 f(b)}{\partial b^2} \right) \left( \frac{\partial^8 f(b)}{\partial b^8} \right) \right] \varepsilon^{10} \mu_{10}(b) + \\
 & \left[ \frac{1}{514800} \left( \frac{\partial^6 f(b)}{\partial b^6} \right)^2 + \frac{1}{302400} \left( \frac{\partial^5 f(b)}{\partial b^5} \right) \left( \frac{\partial^7 f(b)}{\partial b^7} \right) + \frac{1}{483840} \left( \frac{\partial^4 f(b)}{\partial b^4} \right) \left( \frac{\partial^8 f(b)}{\partial b^8} \right) \right] \varepsilon^{12} \mu_{12}(b) + \\
 & \left[ \frac{1}{25401600} \left( \frac{\partial^7 f(b)}{\partial b^7} \right)^2 + \frac{1}{14515200} \left( \frac{\partial^6 f(b)}{\partial b^6} \right) \left( \frac{\partial^8 f(b)}{\partial b^8} \right) \right] \varepsilon^{14} \mu_{14}(b) + \\
 & \frac{1}{1625702400} \left( \frac{\partial^8 f(b)}{\partial b^8} \right)^2 \varepsilon^{16} \mu_{16}(b)
 \end{aligned} \tag{5}$$

This numerical approach lets us calculate higher probabilistic moments as well. This way we are able to obtain the third and fourth central probabilistic moments. Statistical inference may be based on probabilistic parameters such as: kurtosis  $\kappa$ , coefficient of variation  $\alpha$  or skewness  $S$ . These characteristics are symbolically described in Equation (6) below

$$\begin{aligned}
 \kappa(f(b)) &= \frac{\mu_4(f(b))}{\sigma^4(f(b))} - 3, \\
 \alpha(f(b)) &= \frac{\sigma(f(b))}{E[f(b)]}, \quad S(f(b)) = \frac{\mu_3(f(b))}{\sigma^3(f(b))},
 \end{aligned} \tag{6}$$

where:  $\mu_3$ ,  $\mu_4$  denote third and fourth central probabilistic moments respectively and  $\sigma$  stands for standard deviation.

#### 4. Calculation experiments

Two independent experiments were performed. They are entirely devoted to the observation of

influence of random modulus of elasticity and random magnitude of uniform loading for horizontal force  $H$  of a single cable element (both treated as a Gaussian random variable). The static scheme of the analysed structure is given in Figure 1.

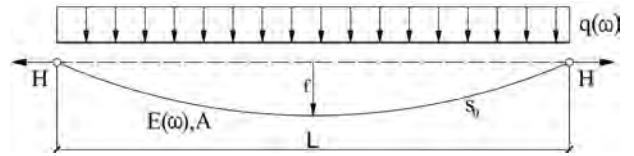


Fig. 1. Static scheme of the analyzed single cable element

Main parameters incorporated into performed calculations: the cable span length  $L = 70.0$  m, the initial length of the cable  $s_0 = 71.0$  m, the cross sectional area of the cable's metallic part  $A = 3$  cm<sup>2</sup>, the change of the temperature  $\Delta T = 50^\circ\text{C}$ , the thermal expansion coefficient  $\alpha T = 0.000012$  1/K, the expected value of the random Young modulus  $E[E] = 150$  GPa, the expected value of the random uniform loading  $E[q] = 4.0$  kN/m.

The Equation for a single cable element under uniform loading assumes the form given in [4, 5]:

$$H^3 + H^2 \cdot E(\omega) \cdot A \left[ 1 - \frac{1}{s_0} (L - \alpha_T \cdot \Delta T \cdot s_0) \right] = \frac{E[E] \cdot A \cdot q(\omega)^2 \cdot L^3}{24s_0} \quad (7)$$

In practice, however, the solution of Equation (7) is obtained via iterative calculations. Numerical determination of the response functions (in respect to the horizontal reaction  $H$ ) is based on 11 computations for different values of the random parameter – modulus of elasticity of the cable and uniform loading respectively. Response functions are plotted using Least Square Method approximation built in the MAPLE computer system.

For random modulus of elasticity  $E$  function  $f^\theta(b)$  given in Equation (4) and observed horizontal reaction  $H$  can be approximated using the Least Square Method for 9<sup>th</sup> degree polynomials for this particular experiment given as follows

$$f[H(E)] = a_0 + a_1E + a_2E^2 + \dots + a_9E^9 \quad (8)$$

It's worth to underline that the degree of polynomial depends on required order of perturbation. With given set of data  $\{(E_1; f(H_1)), (E_2; f(H_2)), \dots (E_{11}; f(H_{11}))\}$  the best fitting curve  $f(H(E))$  has the least square error, i.e.,

$$\begin{aligned} \Pi &= \min \sum_{i=1}^n [f(E_i) - f(H(E_i))]^2 = \\ &= \min \sum_{i=1}^n [f(E_i) - (a_0 + a_1E_i + a_2E_i^2 + \dots + a_mE_i^m)]^2 \quad (9) \end{aligned}$$

Minimization procedures are implemented with the use of the gradient method, where all partial derivatives are calculated with respect to all the coefficients  $a_i$  separately. The entire computational procedure has been implemented into the computer algebra system MAPLE v.13, where all probabilistic moments are derived and determined.

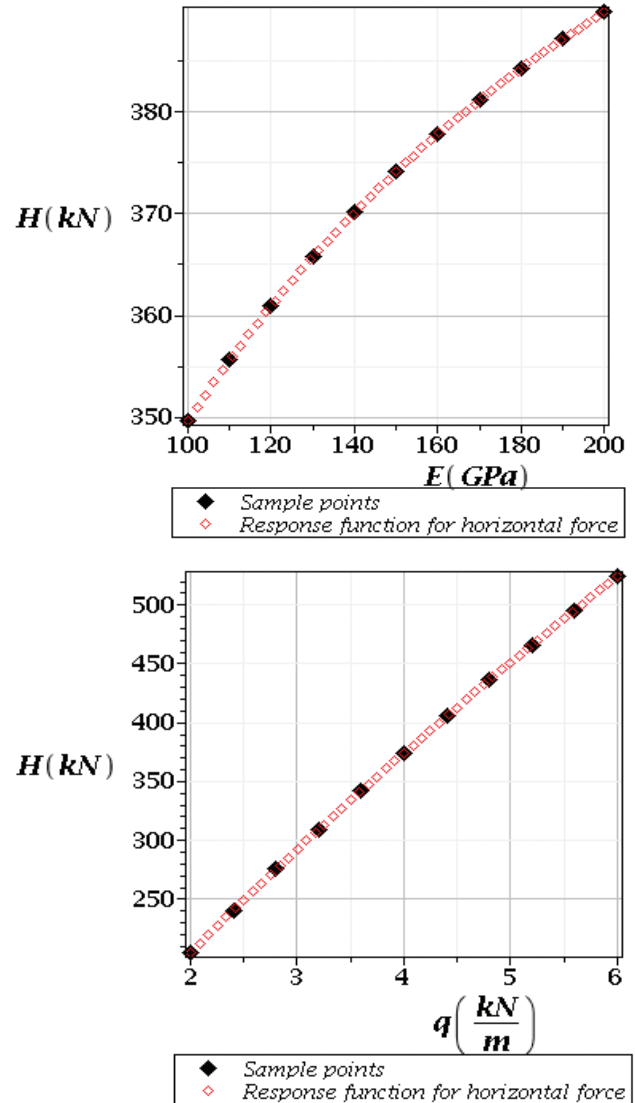


Fig. 2. Response functions with respect to random modulus of elasticity  $E$  (up) and random loading  $q$  (down)

In Figure 2 the response function curves for horizontal reaction  $H$  are presented with respect to two random parameters – Young modulus (up) and loading (down). As we can notice, both functions accurately reflect the analyses that have been carried out (marked on the graphs as a black solid diamond signs – 11 sample points) and they pass through all these points without any local oscillations, irregularities or singularities (especially on the ends of a scale). The response function for random loading is almost linear, which has decisive impact on the particular probabilistic moments of all orders and also for an overall convergence of the perturbation method itself.

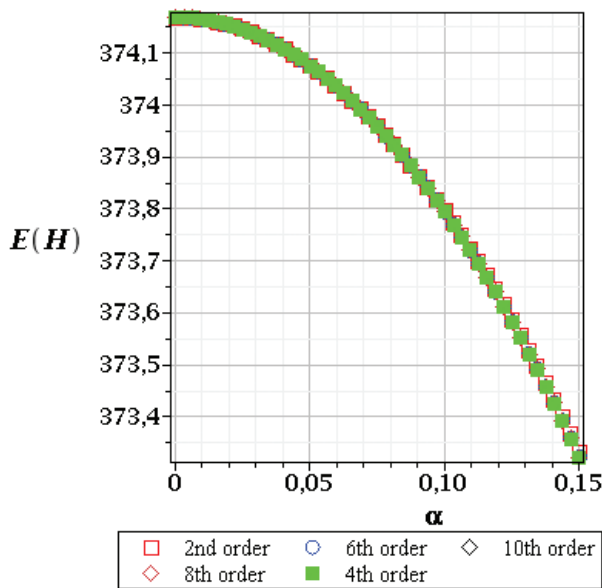
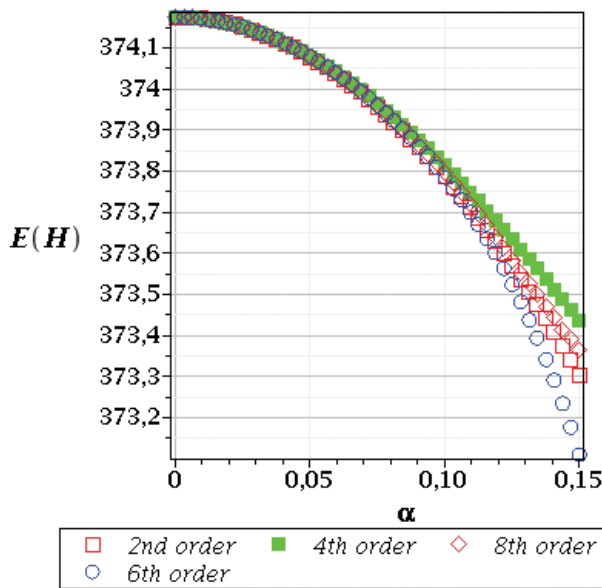


Fig. 3. Expected values of the horizontal reaction with respect to random modulus of elasticity  $E$  (up) and random loading  $q$  (down)

In Figure 3 expectations of the horizontal reaction  $H$ , for random  $E$  and  $q$ , both decrease with increasing coefficient of input random dispersion. As we can observe, the eighth order expansion in perturbation technique is needed only for random modulus of elasticity where for  $\alpha = 0.12$ , 6<sup>th</sup> and 8<sup>th</sup> order curves give the same results. For larger dispersion there is a need to extend the order of polynomial response function and expansion in perturbation technique.

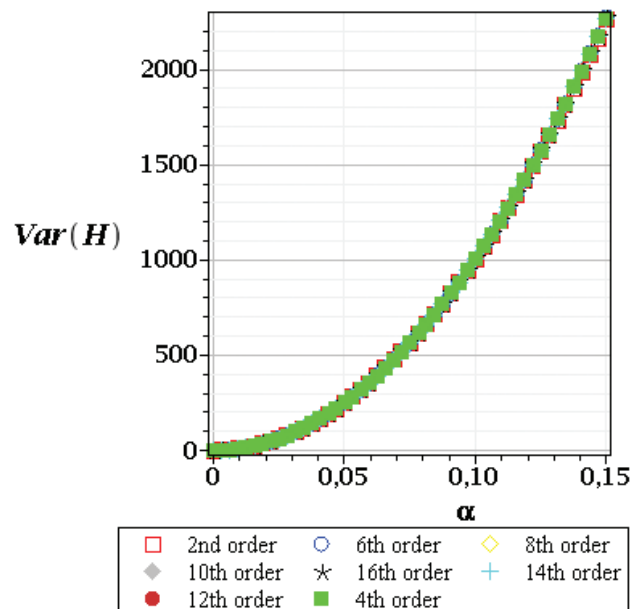
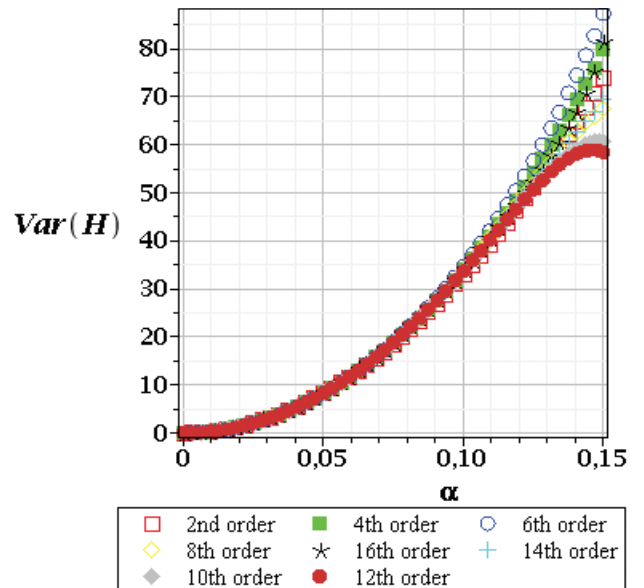


Fig. 4. Variances of the horizontal reaction with respect to random modulus of elasticity  $E$  (up) and random loading  $q$  (down)

Probabilistic output of the structural response (reaction  $H$ ) is given in Figure 4 in the context of variance. Expansion up to 16<sup>th</sup> order is needed again only for random  $E$  and is not necessary for random  $q$ . We can observe as well that  $Var(H)$  assumes far greater values for random loading which seems natural.

The output coefficient of variation  $\alpha(H)$  presented in Figure 5 as a function of input  $\alpha$  for the first case with the random Young modulus (up) does not reflect the linear dependence between these two characteristics. An increase of the input coefficient of variation up to



15% returns only a 2.5% increase in output  $\alpha$ . Higher values of  $\alpha$  ( $H$ ) obtained for random loading (Fig. 5, down) show that this particular random variable has a meaningful influence in the horizontal reaction observations.

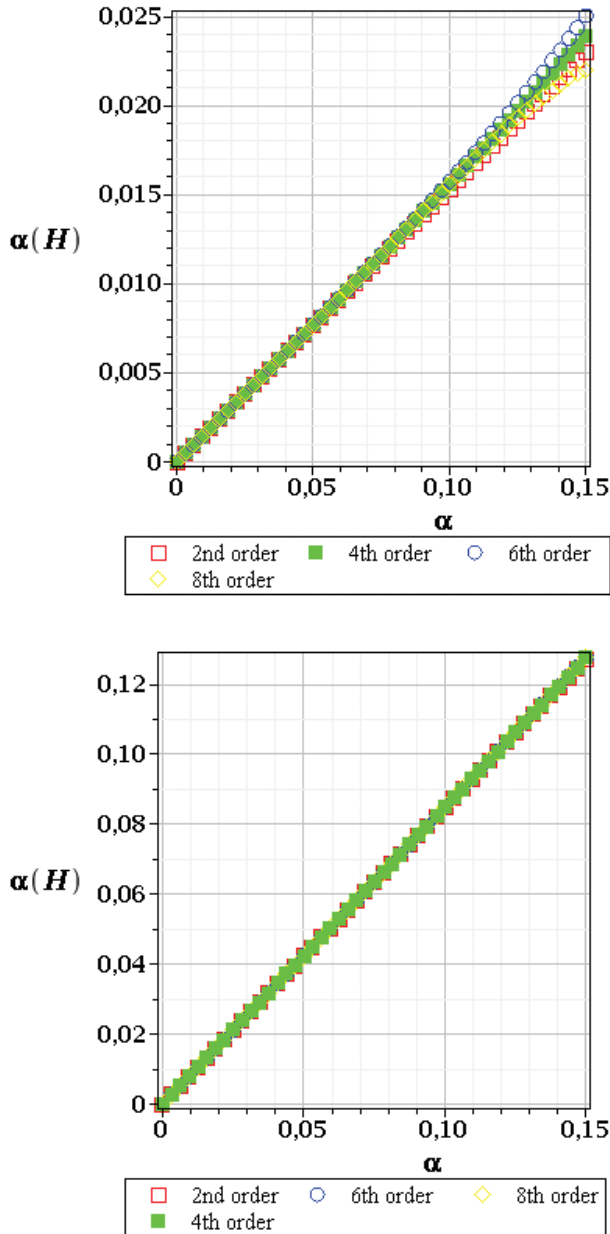


Fig. 5. Coefficients of variation of the horizontal reaction with respect to random modulus of elasticity  $E$  (up) and random loading  $q$  (down)

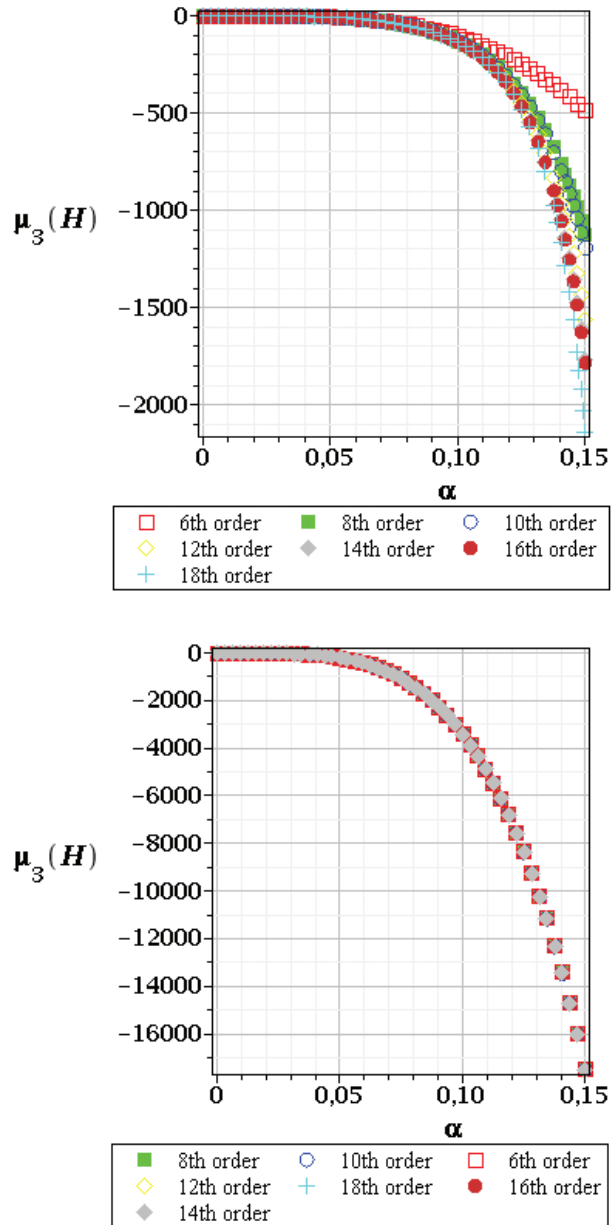


Fig. 6. Third central moment of the horizontal reaction with respect to random modulus of elasticity  $E$  (up) and random loading  $q$  (down)

In Figures 6 and 7, third and fourth central probabilistic moments are presented. As mentioned above, the response functions strongly affect final statistical characteristics, especially in the context of the perturbation method, which is visible in both plots for random  $E$ . To obtain the numerical convergence of the method, 20<sup>th</sup> order is necessary. However, only for random modulus of elasticity.

In Figures 8 and 9 kurtosis and skewness for both computational cases are presented. The observations

of these two probabilistic parameters lead to following conclusions: for random  $E$  both skewness and kurtosis have large values, which corresponds to the oblate and left obliquity distribution and output probability density function is very similar to Gaussian distribution for a random  $q$ .

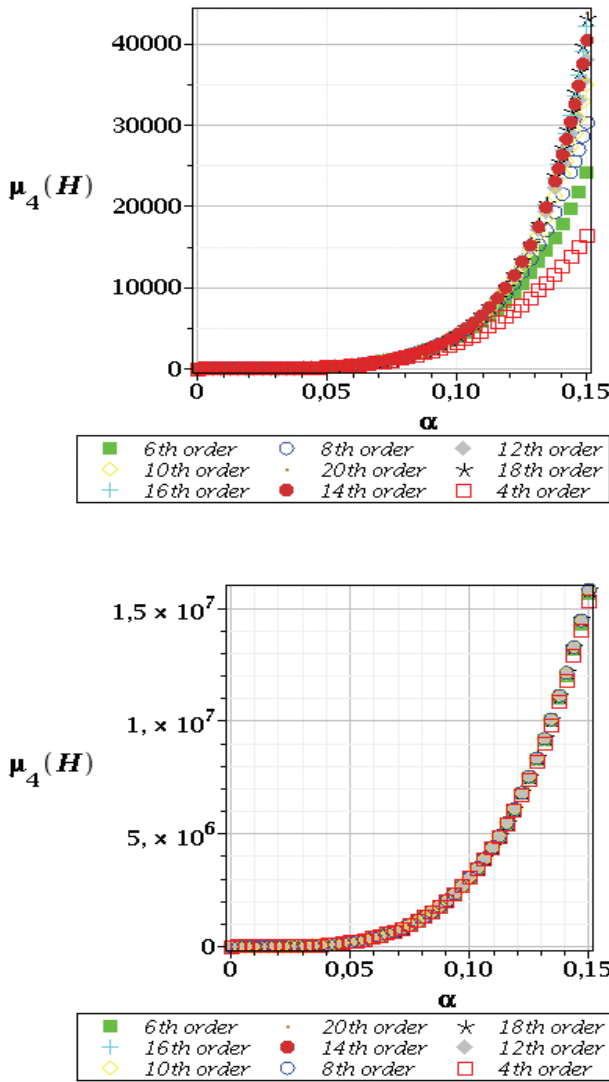


Fig. 7. Fourth central moment of the horizontal reaction with respect to random modulus of elasticity  $E$  (up) and random loading  $q$  (down)

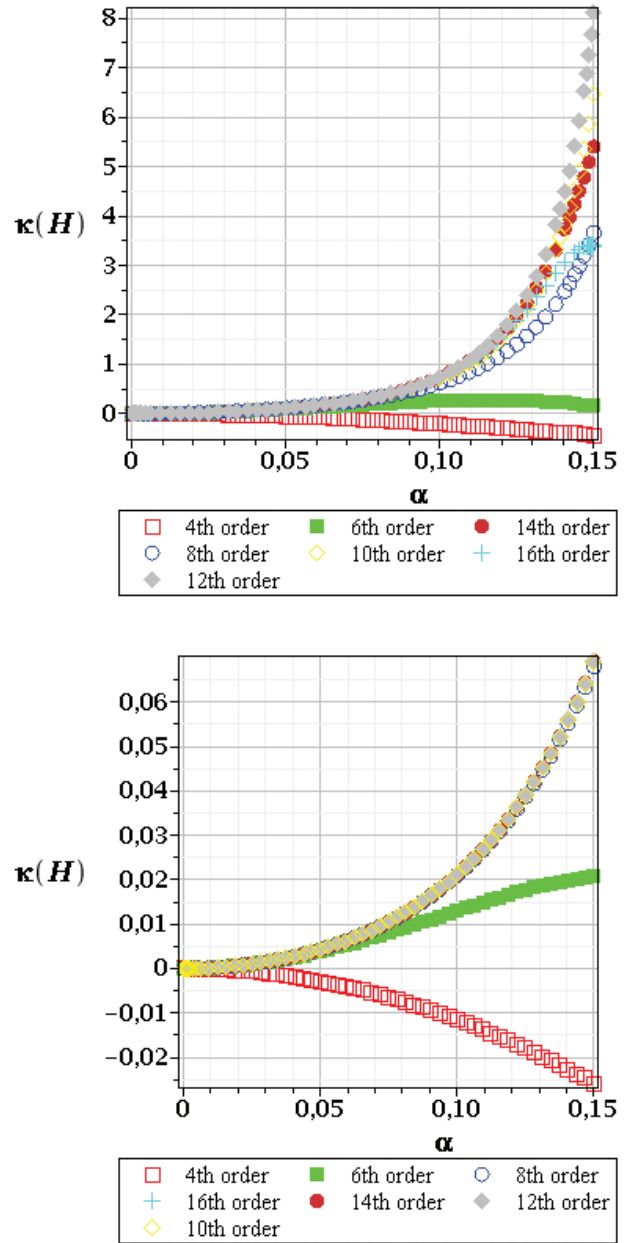


Fig. 8. Kurtosis of the horizontal reaction with respect to random modulus of elasticity  $E$  (up) and random loading  $q$  (down)

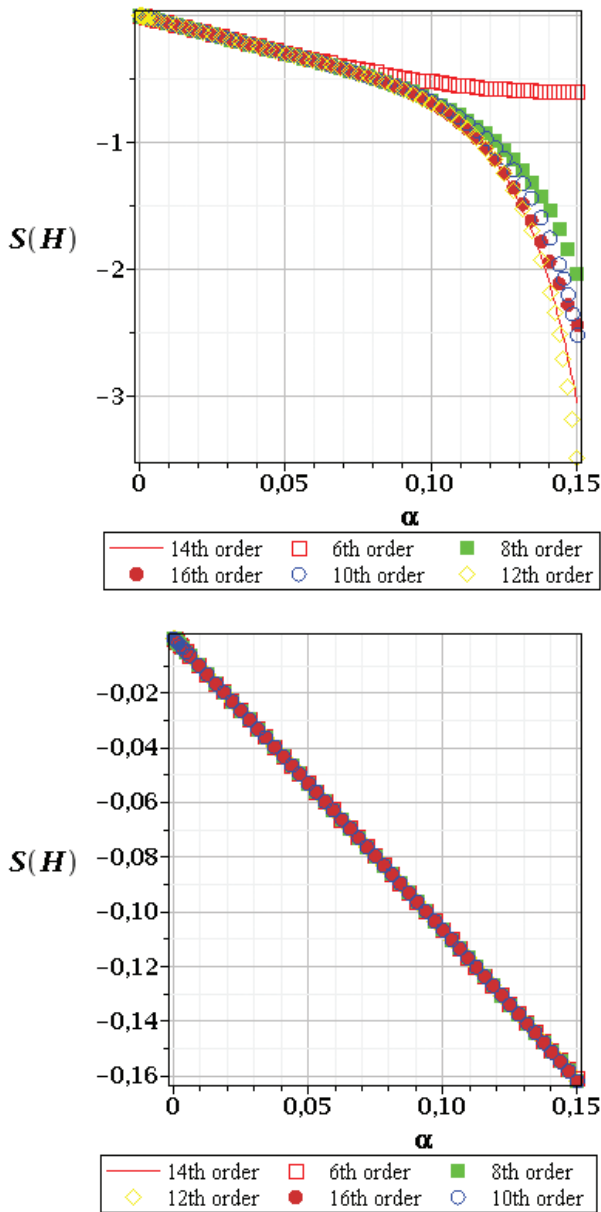


Fig. 9. Skewness of the horizontal reaction with respect to random modulus of elasticity  $E$  (up) and random loading  $q$  (down)

The reliability indices  $\beta$  are presented in Figure 10, obtained for First Order Reliability Method and calculated for bearing capacity limit state. Analysis has been performed for the nominal rope diameter 28 mm, minimum breaking force 458 kN and standard deviation of this value equal to 2%. As we can find in attached graphs, the reliability index  $\beta$  decreases with the increase of the coefficient of variation. Lower values for the same dispersion are depicted for random uniform loading (down), however, in both examples they take values higher than necessary according to the Eurocode standard (recommended

level of the reliability is given there as 3.3-4.3). We can also confirm the dependency between the form of the response function and the obtained convergence of the perturbation method.

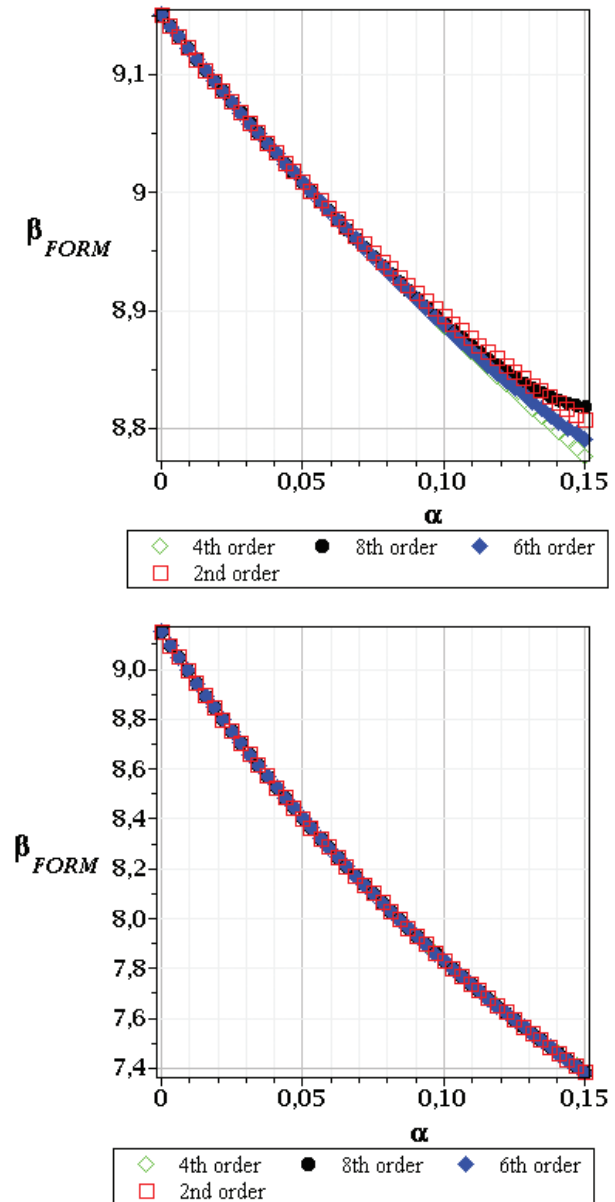


Fig. 10. Reliability index  $\beta$  for bearing capacity with respect to random modulus of elasticity  $E$  (up) and random loading  $q$  (down)

### 5. Conclusions

On the basis of the performed and discussed analyses, it can be stated that:

- applying GSPM supported by a response function method may be a very efficient tool for cable structures reliability analyses;
- extending the presented computer application for more complex cable structures like masts



or bridges is possible. For that purpose we should obtain the response of the structure of the demanded parameter using traditional approach of FEM and then gather statistics in the way described in the article;

- similar considerations may be derived for other types of randomness, e.g. supports susceptibility, temperature action, mass density and etc.

## References

- [1] Pałkowski S.: *Konstrukcje cięgnowe (Cable structures)*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa 1994.
- [2] Pałkowski Sz.: *Konstrukcje stalowe. Wybrane zagadnienia obliczania i projektowania (Steel structures. Chosen issues in calculations and design)*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2010.
- [3] Rykaluk K.: *Konstrukcje stalowe. Kominy, wieże, maszty (Steel structures. Chimneys, towers, masts)*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2004.
- [4] Biegus A.: *Probabilistyczna analiza konstrukcji stalowych (Probabilistic analysis of the steel structures)*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa – Wrocław 1999.
- [5] Elachachi S.M. et al: *A probabilistic multi-scale time dependent model for corroded structural suspension cables*, Journal of Probabilistic Engineering Mechanics, 3 (2006), pp. 235-245.
- [6] Faber M.H et al: *Aspects of parallel wire cable reliability*, Journal of Structural Safety, 2 (2003), pp. 201-225.
- [7] Çavdar Ö. et al: *Stochastic finite element analysis of a cable-stayed bridge system with varying material properties*, Journal of Probabilistic Engineering Mechanics, 25 (2010), pp. 279-289.
- [8] Tomko M. et al.: *Vibrations of an aramid anchor cable subjected to turbulent wind*, Journal of Advances in Engineering Software, 72 (2014), pp. 39-56.
- [9] Iványi P.: *A new conceptual design tool for cable-membrane structures*, Journal of Advances in Engineering Software, 57 (2013), pp. 33-39.
- [10] Kamiński M.: *The Stochastic Perturbation Method for Computational Mechanics*. Wiley, Chichester, 2013.

Jacek Szafran

# Zastosowanie uogólnionej metody perturbacji stochastycznej w analizie konstrukcji cięgnowych

## 1. Wprowadzenie

Konstrukcje cięgnowe (konstrukcje z elementami rozciąganyymi) zyskują coraz szersze zastosowanie zarówno w praktyce inżynierskiej, jak i w szeroko rozumianej działalności naukowej. Ich główne zalety zostały opisane w [1, 2], a do nich należy bezwzględnie zaliczyć niewielki ciężar w porównaniu do konstrukcji tradycyjnych, który wprost wynika z wysokiej wytrzymałości samego materiału, a także z faktu, że jedynie naprężenia rozciągające występują w tego typu elementach.

Jednym z problemów w analizie elementów cięgnowych jest prawidłowe przyjęcie modułu sprężystości podłużnej elementów linowych. W przypadku masztów problem został omówiony w [3]. W przypadku elementów cięgnowych niepoddanych wstępnemu przeciąganiu wartości wyżej wymienionego parametru charakteryzują się dość dużym

rozrzutem. Inne typy parametrów losowych dla stalowych elementów poddanych rozciąganiu można znaleźć w [4]. W procesie projektowania konstrukcji cięgnowych bardzo często bierze się pod uwagę przypadki obciążenia w postaci oddziaływania wiatru i oblodzenia. Dwa te przypadki z całą pewnością możemy uznać jako losowe.

## 2. Najnowsze tendencje w badaniach naukowych konstrukcji cięgnowych

Konstrukcje cięgnowe są jednymi z najczęściej stosowanych w nowoczesnym budownictwie przemysłowym. Stąd też duże zainteresowanie wszelkiego rodzaju badaniami naukowymi na ten temat szczególnie, w kontekście probabilistycznym. W [5] można znaleźć rozważania na temat kabli podwieszających narażonych na ciągłe działanie agresywnego środowiska. Aspekty niezawodności przedstawione zostały

w [6] – dla konstrukcji mostowych ukazano rozważania na temat zmęczenia i wytrzymałości cięgien podwieszających. Niezawodność została zaprezentowana jako efekt odpowiedniej filozofii projektowania, a także odpowiedniego zabezpieczenia antykorozyjnego konstrukcji. Sejsmiczna analiza stochastyczna wykorzystująca MES została zaprezentowana w [7]. Właściwości materiałowe cięgien użytych dla konkretnej konstrukcji mostowej zostały rozpatrzone jako pola losowe. Elementy analizy oddziaływania wiatru i jego wpływu na zakotwienie elementów kablowych zostały przedstawione w [8]. Nowe podejścia projektowe i narzędzia pozwalające na uzyskanie pożądanych kształtów konstrukcji ciągnowo-powłokowych zaprezentowano w [9].

### 3. Uogólniona metoda perturbacji stochastycznej

Zmienna losowa  $b = b(\omega)$  przy gęstości prawdopodobieństwa oznaczonej  $p(b)$  może zostać użyta do określenia probabilistycznego momentu centralnego rzędu  $m$  jako (1). Podstawowym założeniem metody opisanej w [10] jest rozwinięcie wszystkich wejściowych zmiennych losowych i funkcji stanu danego problemu poprzez szereg Taylora dookoła ich przestrzennych wartości średnich przy użyciu parametru  $\varepsilon > 0$  tak jak zaprezentowano w (2). Wartości oczekiwane danej funkcji  $f(b)$  zdefiniowane tak jak w (1) mogą zostać przedstawione w sposób (3). Rozwinięcie do ósmego rzędu metody perturbacji funkcji  $f(b)$  parametru losowego  $b$  zostało zaprezentowane w równaniu (4). W celu prezentacji złożoności rozwinięcia wyższych rzędów metody i wyższych momentów probabilistycznych przedstawiono równanie (5) wariancji 16. rzędu. Takie podejście obliczeniowe pozwala na numeryczne określenie: trzeciego i czwartego momentu centralnego –  $\mu_3$  i  $\mu_4$ . Wykorzystując wyżej wymienione równanie można uzyskać takie parametry statystyczne jak: kurtoza  $\kappa$ , współczynnik rozproszenia  $\alpha$  i skośność  $S$  (6).

### 4. Przykłady obliczeniowe

Wykonano dwa niezależne eksperymenty. W całości poświęcone są obserwacji wpływu losowego modułu Younga oraz losowej intensywności obciążenia równomiernie rozłożonego na reakcję poziomą  $H$  dla pojedynczego elementu ciągnowego. Schemat statyczny konstrukcji przedstawiony jest na rysunku 1. Równanie dla pojedynczego elementu ciągnowego pod obciążeniem równomiernie rozłożonym przyjmuje formę (7). Numeryczne określenie funkcji odpowiedzi konstrukcji oparte jest na 11 kalku-

lacjach dla różnych wartości parametrów losowych. Funkcje odpowiedzi określono wykorzystując metodę najmniejszych kwadratów zaimplementowaną w pakiecie obliczeń symbolicznych MAPLE. Funkcja ta dla losowego modułu Younga cięгна i obserwowanej reakcji poziomej przyjmuje postać (8). Na podstawie zestawu danych najmniejszy błąd określony jest jako (9).

Na rysunku 2 przedstawiono wykresy funkcji odpowiedzi dla reakcji poziomej  $H$  w zależności od dwóch parametrów losowych – modułu sprężystości (dolny wykres) i obciążenia (górny wykres). Obie funkcje dokładnie odzwierciedlają przeprowadzone analizy (oznaczone na rysunku 2 czarnymi punktami). Rysunek 3 przedstawia wartości oczekiwane reakcji poziomej  $H$  odpowiednio dla losowych:  $E$  i  $q$ . Można zauważyć, że rozwinięcie ósmego rzędu jest niezbędne jedynie dla losowego modułu sprężystości. Wyniki probabilistyczne w postaci wariancji reakcji poziomej  $H$  przedstawione zostały na rysunku 4, natomiast współczynnika rozproszenia na rysunku 5. Oba parametry ukazane zostały w funkcji wejściowego współczynnika wariancji  $\alpha$ . Można zauważyć, że dla losowego modułu Younga zależność pomiędzy  $\alpha(H)$  a  $\alpha$  nie jest liniowa. Wzrost wejściowego współczynnika rozproszenia do 15% powoduje wzrost  $\alpha(H)$  jedynie od 2,5%. Na rysunkach 6 i 7 przedstawiono wykresy trzeciego i czwartego momentu centralnego. Na rysunkach 8 i 9 uzyskano wykresy kurtozy i skośności. Obserwacje tych dwóch parametrów prowadzą do następujących wniosków: dla losowego  $E$  skośność i kurtoza przyjmują dość duże wartości, które korespondują z lewo skośną, spłaszczoną funkcją gęstości prawdopodobieństwa wyjściowej. Dla losowego  $q$  funkcja gęstości jest zbliżona dla rozkładu Gaussa.

Na rysunku 10 zaprezentowane zostały wskaźniki niezawodności  $\beta$  podejścia FORM i obliczone dla stanu granicznego nośności. Analiza została przeprowadzona dla liny o średnicy 28 mm i minimalnej siły zrywającej równej 458 kN. Odchylenie standardowe tej wartości wynosi 2%. Jak można zauważyć na podstawie zamieszczonych wykresów wartość  $\beta$  maleje wraz ze zwiększającym się  $\alpha$ . Mniejsze wartości dla tego samego poziomu rozrzutu uzyskano dla przypadku z losową wielkością obciążenia (dolny wykres). Trzeba podkreślić fakt, że pomimo tego dla każdego z przypadków wartości wskaźnika niezawodności są większe niż te rekomendowane w Eurokodzie wartości  $\beta$  (3,3-4,3).

## 5. Wnioski

Na podstawie przeprowadzonych analiz można stwierdzić:

- zastosowanie uogólnionej metody perturbacji stochastycznej wzbogacone o metodę funkcji odpowiedzi jest wydajnym narzędziem obliczeniowym w analizie niezawodności konstrukcji ciągnowych;
- rozszerzenie zaprezentowanej analizy komputerowej dla bardziej złożonych konstrukcji ciągnowych tj. masztów lub mostów, wydaje się być możliwe. W tym celu należy uzyskać odpowiedź konstrukcji analizowanego parametru, używając tradycyjnego podejścia MES, a następnie uzyskać statystyki w sposób opisany w niniejszym artykule;
- podobne rozważania można przeprowadzić dla innych typów losowości, takich jak podatność podpór, oddziaływanie temperatury, ciężaru własnego itp.